A **Matemática Discreta 1** Primer parcial	1$^{\text{er}}$ Apellido: ______________	3 de noviembre de 2016
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2$^{\text{o}}$ Apellido: ______________ Nombre: ______________ Número de matrícula:	Tiempo 2 h 30 min. **Nota:**

Ejercicio 1 (3 puntos)

En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación aRb, con $a, b \in \mathbb{Z}$, si y sólo si $a^2 = b^2$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del elemento 2.

Solución:

1. Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$, se tiene que aRa
$$a^2 = a^2 \Rightarrow aRa$$
2. Simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, si aRb, entonces bRa
$$aRb \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bRa$$
3. Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, si aRb y bRc, entonces aRc
$$\left.\begin{array}{r} aRb \Rightarrow a^2 = b^2 \\ bRc \Rightarrow b^2 = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow aRc$$

La clase de equivalencia del 2 es $[2] = \{-2, 2\}$.

Ejercicio 2 (12 puntos)

Considera el conjunto ordenado A de la figura 1.

a) Sea $B = \{a, d, f\}$, encuentra todos los elementos notables de B (cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay).

b) Encuentra, si existen, todos los elementos complementarios de b y de c.

c) Razona si A es Álgebra de Boole.

Sean $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ y $(Y, \leq)$ dos conjuntos ordenados, con $X = \{a, b\}$, $Y = \{0, 1\}$, y donde $\mathscr{P}(X)$ es el conjunto de las partes de X.

d) Calcula el cardinal del producto cartesiano $\mathscr{P}(X) \times Y$.

e) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(\mathscr{P}(X) \times Y, \leq_{Lex})$, donde $\leq_{Lex}$ es la relación "orden lexicográfico".

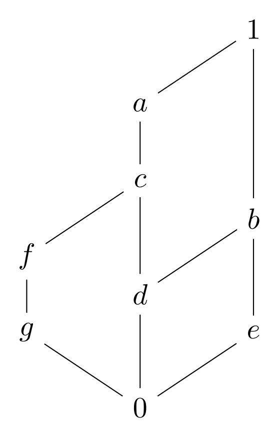

Figura 1: A

Solución:

a)

Cotas superiores: $\{1, a\}$
Cotas inferiores: $\{0\}$
Supremo: a
Ínfimo: 0
Maximales: $\{a\}$
Minimales: $\{f, d\}$
Máximo: a

Mínimo: no hay

b) El elemento b tiene dos elementos complementarios f y g, mientras que el elemento c tiene como único complementario el elemento e.

c) No es Álgebra de Boole ya que A no es retículo complementario. Por ejemplo, el elemento d no tiene complementario.

d) $\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, $|\mathscr{P}(X) \times Y| = 8$.

e)

$$\begin{tikzcd}
& (\{a,b\},1) \arrow[d, dash] & \\
& (\{a,b\},0) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(\{a\},1) \arrow[d, dash] & & (\{b\},1) \arrow[d, dash] \\
(\{a\},0) \arrow[dr, dash] & & (\{b\},0) \arrow[dl, dash] \\
& (\emptyset,1) \arrow[d, dash] & \\
& (\emptyset,0) &
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Utilizando el método de Quine McCluskey, obtén una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es

$$S(f) = \{0001, 0010, 0100, 0101, 0110, 1100, 1010, 0111, 1111\}.$$

Solución: $f(x,y,z,t) = x'z't + yz't' + y'zt' + yzt + x'y$

$$\begin{array}{cl}
* & 0001 \\
* & 0010 \\
* & 0100 \\
\hline
* & 0101 \\
* & 0110 \\
* & 1100 \\
* & 1010 \\
\hline
* & 0111 \\
\hline
* & 1111
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{cl}
 & 0\text{-}01 \\
 & 0\text{-}10 \\
 & \text{-}010 \\
* & 010\text{-} \\
* & 01\text{-}0 \\
 & \text{-}100 \\
\hline
* & 01\text{-}1 \\
* & 011\text{-} \\
\hline
 & \text{-}111
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{c}
01\text{--} \\
\cancel{01\text{--}}
\end{array}$$

	0001	0010	0100	0101	0110	1100	1010	0111	1111
0-01	X			X					
0-10		X			X				
-010		X					X		
-100			X			X			
-111								X	X
01--			X	X	X			X	

Ejercicio 4 (3 puntos)

Demuestra, aplicando el Principio de Inducción, que

$$\sum_{k=1}^{n} 2k(2k-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución:

1. Comprobamos que se cumple para $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1} 2k(2k-1) = 2 \cdot 1 \qquad = \frac{1(1+1)(4 \cdot 1 - 1)}{3} = \frac{6}{2} = 2$$

2. Asumimos que se cumple para n, y comprobamos que también se cumple para $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k(2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2k(2k-1)\right) + 2(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{3} + 2(n+1)(2n+1) = \frac{(n+1)[n(4n-1) + 6(2n+1)]}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(4n^2+11n+6)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{3}$$

Ejercicio 5 (12 puntos)

Jaime desea renovar el mobiliario de su cafetería, para ello adquiere 91 sillas y 28 mesas. Cuando llega a su casa no recuerda si el coste total de la compra ha sido de 11310 € o de 11130 €, pero si recuerda que cada silla costó una cantidad exacta de euros, mayor que 80 € y cada mesa una cantidad exacta de euros, mayor que 120 €.

a) ¿Cuánto dinero ha invertido exactamente?

b) Averigua cuánto costó cada mesa y cada silla.

Solución:

a) Sean x el precio de cada silla, e y el precio de cada mesa, para encontrar cuando dinero se ha invertido tenemos que resolver alguna de las siguientes ecuaciones diofánticas

$$91x + 28y = 11310, \qquad 91x + 28y = 11130.$$

Calculamos entonces el máximo común dividor de los coeficientes (utilizando el algoritmo de Euclides) y comprobamos si las ecuaciones anteriores tienen solución:

$$\left.\begin{aligned} 91 &= 3 \cdot 28 + 7 \\ 28 &= 4 \cdot 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow mcd(91, 28) = mcd(28, 7) = 7$$

Comprobamos que 7 no divide a 11310 luego la ecuación $91x + 28y = 11310$ no tiene solución en $\mathbb{Z}$. Por otro lado, sí se cumple que $7 | 11130$ por lo que la ecuación $91x + 28y = 11130$ sí tiene soluciones enteras. El dinero invertido es 11130 €.

b) Obtenemos una solución particular de la ecuación $91x + 28y = 11130$ utilizando el algoritmo extendido de Euclides:

$$7 = 91 - 28 \cdot 3 \Rightarrow 11130 = 91 \cdot \frac{11130}{7} - 28 \cdot 3 \cdot \frac{11130}{7} \Rightarrow 11130 = 91 \cdot 1590 + 28 \cdot (-4770)$$

$x_0 = 1590$, $y_0 = -4770$, y el resto de soluciones son:

$$\begin{cases} x = 1590 + 4t \\ y = -4770 - 13t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Como también debe cumplirse que $x > 80$, $y > 120$, tenemos que

$$\begin{cases} x = 1590 + 4t > 80 \\ y = -4770 - 13t > 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -377{,}5 \\ t < -376{,}1 \end{cases} \Rightarrow t = -377 \Rightarrow \begin{cases} x = 82 \\ y = 131 \end{cases}$$

Luego cada silla cuesta 82 € y cada mesa 131 €.